



CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

SESSION 2012

Composition portant sur un sujet de statistiques

EPREUVE N° 35

Durée : 5 h
Coefficient : 2

SUJET :

PROBLEME I (5 points)

Etant donné un entier naturel n , $n \geq 2$, on considère n variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On pose :

$$Y = \min(X_1, \dots, X_n) \text{ et } Z = \max(X_1, \dots, X_n)$$

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x , $0 \leq x \leq 1$, on a :

$$P(Z \leq x) = x^n$$

- b) En déduire la densité f_Z de la variable aléatoire Z .

2. a) Montrer que pour tout nombre réel x , $0 \leq x \leq 1$, on a :

$$P(Y > x) = (1 - x)^n$$

- b) En déduire la densité f_Y de la variable aléatoire Y .

3. a) Montrer que les variables aléatoires $1 - Y$ et Z ont même loi de probabilité.

- b) En déduire une relation entre les espérances $E(Y)$ et $E(Z)$ d'une part et les variances $V(Y)$ et $V(Z)$ d'autre part.

4. Montrer que :

$$E(Z) = \frac{n}{n+1}$$

En déduire $E(Y)$.

5. Montrer que :

$$V(Z) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

En déduire $V(Y)$.

PROBLEME II (5 points)

Un centre administratif dispose d'un réseau de 120 ordinateurs. Le tableau suivant indique le nombre de pannes matérielles et logicielles survenues par jour et sur tout le réseau, au cours d'une période de 30 jours :

Nombre de pannes par jour	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	5	12	9	2	1	1

On suppose que chaque panne est réparée pour le lendemain.

1. Calculer le nombre moyen de pannes par jour.
2. Dans le but d'obtenir un modèle théorique pour la distribution des pannes, on propose d'effectuer un test du khi-deux au risque de 5% avec pour hypothèse H_0 :

«Le nombre de pannes par jour suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1,5$ »

Les étapes de ce test sont les suivantes :

- a) Calculer les effectifs théoriques sous cette hypothèse.
- b) Calculer la valeur expérimentale du khi-deux et le nombre ν de degrés de liberté.
- c) Déduire la valeur du seuil théorique en utilisant la table du khi-deux.
- d) Peut-t-on accepter l'hypothèse H_0 ?

3. En déduire la probabilité pour qu'un ordinateur quelconque de ce réseau ait au moins une panne pendant cette période de 30 jours.

PROBLEME III (5 points)

PARTIE A

Les résultats d'une élection opposant deux candidats A et B sont les suivants :

- Le candidat A a obtenu 45% des suffrages exprimés.
- Le candidat B a obtenu 55% des suffrages exprimés.

Le nombre de suffrages exprimés est très grand.

On considère un échantillon, pris au hasard, de 10 bulletins exprimés et on note X la variable aléatoire :

«Nombre de votes favorables au candidat A parmi ces 10 bulletins»

1. Déterminer la loi de probabilité de X puis son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$.
2. En déduire la probabilité que le candidat A obtienne, sur cet échantillon, plus de 50% des voix.

PARTIE B

Au cours d'une élection suivante un candidat C se présente et effectue 16 sondages portant chacun sur un échantillon de 150 électeurs.

On suppose que le nombre moyen d'intention de votes favorables au candidat C est 78,4 et l'écart-type 3,7.

1. Donner un intervalle de confiance au risque de 5% pour la moyenne du nombre de voix favorables au candidat C dans un échantillon de 150 personnes.
2. Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95%, que le candidat sera élu ?

NB. Les parties A et B sont indépendantes.

PROBLEME IV (5 points)

Selon la recommandation en vigueur dans toute grande ville le niveau moyen de pollution de l'air par jour ne doit pas dépasser $50 \mu\text{g}$ (microgramme) de particules en suspension par m^3 .

Deux échantillons de 10 mesures obtenues au cours d'une journée par deux capteurs situés dans deux quartiers différents d'une même ville sont donnés dans le tableau ci-dessous (les valeurs sont données en $\mu\text{g}/\text{m}^3$) :

Echantillon 1 1 ^{er} capteur	48,5	50,8	46,7	49,3	47,9	51,4	46,7	45,9	47,8	49,9
Echantillon 2 2 ^{ème} capteur	45,7	46,8	50,7	45,1	48,3	49,7	47,8	51,4	48,6	47,5

On note X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire associée aux mesures effectuées par le 1^{er} capteur (resp. 2^{ème} capteur).

1. Calculer la moyenne et la variance de chacun de ces deux échantillons.
2. En déduire des estimations non biaisées de l'espérance et de la variance de chacune de ces deux variables aléatoires X_1 et X_2 .
3. Afin de comparer les espérances μ_1 et μ_2 de X_1 et X_2 on propose d'effectuer un test de comparaison dont l'hypothèse nulle H_0 est : $\mu_1 = \mu_2$.

On suppose que les écarts-types σ_1 et σ_2 de X_1 et X_2 sont égaux.

Peut-on en conclure, au risque de 5%, que les niveaux moyens de pollution des deux quartiers sont égaux ?

4. On considère l'échantillon obtenu en regroupant les 20 mesures précédentes. On note X la variable aléatoire, supposée normale, associée à cet échantillon. La variance de cet échantillon est notée s^2 .

Déterminer un intervalle de confiance de l'écart-type σ de X au risque de 5%.

On rappelle que pour un échantillon de taille n la variable aléatoire $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ suit une loi du khi-deux à $n - 1$ degrés de liberté.

DOCUMENTS :

Tables

Fonction de répartition de la loi normale, loi du khi-deux, loi de Student et loi de Poisson

NOTA :

- 2 points seront retirés au total de la note sur 20 si la copie contient plus de 10 fautes d'orthographe ou de syntaxe.
- **Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies** : pas de signature (signature à apposer uniquement dans le coin gommé de la copie à rabattre) ou nom, grade, même fictifs. Seuls la date du concours et le destinataire, (celui-ci est clairement identifié dans l'énoncé du sujet) sont à porter sur la copie.
- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.
- Lorsque les renvois et annotations en bas d'une page ou à la fin d'un document ne sont pas joints au sujet, c'est qu'ils ne sont pas indispensables.

<

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE

$$\Pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

<i>t</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de *t*

<i>t</i>	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

LOI DU KHI-DEUX

Valeurs de χ^2 ayant la probabilité $q = 1 - p$ d'être dépassées

q v	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001
1		0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	1,39	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,01	1,42	2,37	3,67	4,64	6,25	7,82	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

LOI DE STUDENT

Valeurs de t ayant la probabilité P d'être dépassées en valeur absolue

n	P	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1		0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2		0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3		0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4		0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5		0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6		0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7		0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,449	5,408
8		0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9		0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10		0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11		0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12		0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13		0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14		0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15		0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16		0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17		0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18		0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,992
19		0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20		0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21		0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22		0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23		0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24		0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25		0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26		0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27		0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28		0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29		0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30		0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40		0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60		0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120		0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
		0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

LOI DE POISSON

$$p_{\lambda}(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

λ k	0,5	1,0	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
0	0,6065	0,3679	0,2231	0,1353	0,0831	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041
1	0,3033	0,3679	0,3347	0,2707	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225
2	0,0758	0,1839	0,2510	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618
3	0,0126	0,0613	0,1255	0,1804	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	0,1687	0,1404	0,1033
4	0,0016	0,0153	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558
5	0,0002	0,0031	0,0141	0,0361	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714
6		0,0005	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571
7		0,0001	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044	0,1234
8			0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849
9				0,0002	0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519
10					0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181	0,0285
11					0,0001	0,0002	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143
12						0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065
13							0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028
14								0,0001	0,0002	0,0005	0,0011
15									0,0001	0,0002	0,0004
16										0,0001	0,0001

ÉPREUVE N° 35