CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

SESSION 2012

Composition portant sur un sujet de mathématiques

EPREUVE N° 34

Durée : 5 h
Coefficient : 2

SUJET :

Problème I (12 points)

Notations. On note E l'ensemble des fonctions d'une variable réelle et à valeurs complexes qui sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. A tout couple (f, g) de fonctions de E on associe la fonction numérique notée $f * g$ définie par :

$$(f*g)(x) = \int_o^x f(t)g(x-t)dt$$

Rappel. Etant donné une fonction h de deux variables réelles et à valeurs complexes, qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, alors la fonction H définie par :

$$H(x) = \int_o^x h(x,t)dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$H'(x) = h(x,x) + \int_0^x \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt$$

Partie I

Dans cette partie on suppose que les fonctions f et g appartiennent à E.

1. On note 1 la fonction constante égale à 1. On pose :

$$F = f * 1$$

Que représente F ?

2. Démontrer que $f * g = g * f$.

3. On suppose que pour $x \leq 0$ on a $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$. Montrer que $(f * g)(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

4. On suppose que pour $x \notin [0, 1]$ on a $f(x) = g(x) = 0$. Démontrer que $(f * g)(x) = 0$ si $x \notin [0, 2]$.

5. Démontrer que si les deux fonctions f et g sont des fonctions polynomiales alors $f * g$ en est aussi une.

6. Etant donné un nombre réel $a \neq 0$ et une fonction u de E, on note u_a la fonction de E définie par :

$$u_a(x) = u(ax)$$

Démontrer que :

$$f_a * g_a = \frac{1}{a}(f * g)_a$$

En déduire la parité de $f * g$ lorsque chacune des fonctions f et g est soit paire soit impaire.

7. Démontrer que $f * g$ est dérivable et vérifie :

$$(f * g)' = g(0)f + f * g' = f(0)g + f' * g$$

Pour tout entier naturel n, $n \geq 1$, démontrer que $f * g$ est n fois dérivable et vérifie :

$$(f * g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} g^{(k)}(0) f^{(n-k-1)} + f * g^{(n)}$$

En déduire que $f * g \in E$. On définit ainsi une application $\mathcal{B}$ de $E \times E$ dans E, définie par :

$$\mathcal{B}(f, g) = f * g$$

appelée produit de convolution dans E.

8. Démontrer que $\mathcal{B}$ est bilinéaire.

9. Pour tout couple de nombres complexes (λ, μ), calculer :

$$exp_\lambda * exp_\mu$$

Puis, pour a et b réels non nuls :

$$cos_a * sin_b$$

En utilisant la question 7 en déduire :

$$sin_a * sin_b$$

Partie II

Etant donné un entier naturel p, on note m_p la fonction polynomiale définie par :

$$m_p(x) = x^p$$

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on considère le nombre réel :

$$I_{p,q} = (m_p * m_q)(1)$$

1. Démontrer que si $q \geq 1$ on a :

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

2. En déduire la valeur de $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+q,0}$, puis la valeur de $I_{p,q}$.

3. Démontrer que :

$$m_p * m_q = I_{p,q}\, m_{p+q+1}$$

Pour $x \neq 0$, on pourra effectuer le changement de variable $t = ux$.

Partie III

On considère la fonction numérique F définie par :

$$F(x) = 2x^2 - 1$$

1. Démontrer que pour toute fonction f de E, $(f * F)^{(3)}$ s'exprime en fonction de f et de f''.

2. Soit $\mathcal{P}_2$ la partie de E formée des fonctions polynomiales P de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer les fonctions f de E telles que $f * F \in \mathcal{P}_2$.

3. En déduire :

$$exp_2 * F \text{ et } exp_{-2} * F$$

Partie IV

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2(x^2+1)} \text{ et } g(x) = 4x - 5$$

1. Calculer $f * g$ puis $h = (f * g)'$.

2. Démontrer que h s'annule une seule fois sur $[0, +\infty[$ et que cette valeur appartient à $]0, 1[$.

3. Démontrer par récurrence que :

$$h^{(n)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$$

où P_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$, dont on calculera le coefficient dominant noté a_{n+1}.

Problème II (8 points)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients réels, égales à leur carré.

Etant donné deux matrices A, B de $\mathcal{P}$, la relation $AB = BA = A$ est notée $A \leq B$. On pose :

$$\mathcal{S}(A, B) = A + B - AB$$

On considère trois matrices A, B, C de $\mathcal{P}$.

1. Démontrer les propriétés suivantes :

- $A \leq A$
- Si $A \leq B$ et $B \leq A$ alors $A = B$
- Si $A \leq B$ et $B \leq C$ alors $A \leq C$

2. On suppose maintenant que $AB = BA$.

a) Démontrer que :

- $AB \in \mathcal{P}$
- $AB \leq A$ et $AB \leq B$
- Si $C \leq A$ et $C \leq B$ alors $C \leq AB$

b) Démontrer que :

- $\mathcal{S}(A, B) \in \mathcal{P}$
- $A \leq \mathcal{S}(A, B)$ et $B \leq \mathcal{S}(A, B)$
- Si $A \leq C$ et $B \leq C$ alors $\mathcal{S}(A, B) \leq C$

c) Démontrer que :

- $AB \leq \mathcal{S}(A, B)$

3. On considère cinq matrices A, B, C, M et N de $\mathcal{P}$ telles que les matrices A, B et C commutent deux à deux.

a) Démontrer que :

- $ABC \in \mathcal{P}$
- $ABC \leq A$, $ABC \leq B$ et $ABC \leq C$
- Si $M \leq A$, $M \leq B$ et $M \leq C$ alors $M \leq ABC$

b) Démontrer que $\mathcal{S}(A, B)$ commute avec C.

c) On pose :

$$D = A + B + C - (AB + BC + CA) + ABC$$

Démontrer que :

$$D = \mathcal{S}[\mathcal{S}(A, B), C]$$

En déduire que $D \in \mathcal{P}$.

d) En utilisant les résultats du 2, démontrer que :

$$A \leq D,\ B \leq D,\ C \leq D$$

e) En utilisant les résultats des question 2 et 3.c), démontrer que :

$$\text{si } A \leq N,\ B \leq N,\ C \leq N \text{ alors } D \leq N$$

f) Démontrer que :

$$ABC \leq D$$

4. On considère la matrice à coefficients réels :

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les valeurs propres de F.

b) Déterminer les sous-espaces propres de F.

c) Démontrer que F est diagonalisable et en déduire que F appartient à $\mathcal{P}$.

NOTA :

- 2 points seront retirés au total de la note sur 20 si la copie contient plus de 10 fautes d'orthographe ou de syntaxe.
- **Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies** : pas de signature (signature à apposer uniquement dans le coin gommé de la copie à rabattre) ou nom, grade, même fictifs. Seuls la date du concours et le destinataire, (celui-ci est clairement identifié dans l'énoncé du sujet) sont à porter sur la copie.
- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.
- Lorsque les renvois et annotations en bas d'une page ou à la fin d'un document ne sont pas joints au sujet, c'est qu'ils ne sont pas indispensables.

ÉPREUVE N° 34