**CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL**

**SESSION 2011**

**Composition portant sur un sujet de statistiques**

# EPREUVE N° 35

**Durée : 5 h**
**Coefficient : 2**

**SUJET :**

## PROBLEME I (5 points)

On considère deux variables aléatoires discrètes et indépendantes $X$ et $Y$ suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{-1, +1\}$.

**1.** Donner, sous forme de tableau, la distribution de probabilité du couple $(X, Y)$.

**2.** On considère le couple aléatoire $(D, S)$ défini par :

$$\begin{cases} D = X - Y \\ S = X + Y \end{cases}$$

a) Donner, sous forme de tableau, la distribution de probabilité du couple $(D, S)$, ainsi que les lois de $D$ et de $S$.

b) Calculer les espérances $E(D)$ et $E(S)$, puis les variances $V(D)$ et $V(S)$.

c) Calculer la covariance de $(D, S)$, puis le coefficient de corrélation $\rho(D, S)$.

d) Les variables aléatoires $D$ et $S$ sont-elles indépendantes ? Justifier.

## PROBLEME II (5 points)

On considère la fonction numérique $f$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 6x(1-x), \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ f(x) = 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

**1.** Démontrer que $f$ est la densité d'une variable aléatoire continue notée $X$.

**2.** Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$.

**3.** Calculer son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

**4.** On considère deux variables aléatoires indépendantes $Y$ et $Z$ de densité $f$. On pose :

$$T = Inf(Y, Z)$$

On note $G$ la fonction de répartition de $T$ et $g$ sa densité.

a) Exprimer $G$ en fonction de $F$.

b) En déduire $g$ en fonction de $f$ et de $F$. Expliciter $g(x)$.

c) Calculer l'espérance et la variance de $T$.

## PROBLEME III ( 5 points)

Un fournisseur d'accès à Internet installe un nouveau serveur pour *5 000* abonnés.

On suppose que chaque abonné a une probabilité égale à *0,2* de se connecter à un instant donné $t$.

Les comportements des utilisateurs sont supposés indépendants les uns des autres.

On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant $t$ donné.

**1.** Quelle est la loi de $X$ ? Calculer son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

**2.** On pose :

$$Y = \frac{X - 1\,000}{\sqrt{800}}$$

Justifier que la loi de $Y$ peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

**3.** Calculer le nombre minimum $N$ de connexions simultanées que ce serveur doit pouvoir gérer pour que la probabilité d'acceptation d'une demande de connexion soit supérieure à *98%*.

**4.** Suite à une augmentation du nombre d'abonnés le serveur initial est remplacé par un serveur pouvant gérer *2 000* connexions simultanées.

Déterminer alors le nombre possible d'abonnés, sous les hypothèses suivantes :

- La probabilité de tentative de connexion est *0,2*.
- La probabilité d'acceptation de cette connexion par le serveur est supérieure à *98%*.

## PROBLEME IV (5 points)

Les principaux aéroports français proposent un plan de gêne sonore (PGS) afin de respecter les normes sur les bruits des avions. Le PGS délimite des zones à l'intérieur desquelles les riverains subissent une réelle gêne sonore plus ou moins importante.

Cette gêne sonore est quantifiée par un indice de bruit appelé Lden, exprimé en décibels (*db*). Cet indice correspond approximativement à une moyenne pondérée des intensités acoustiques mesurées en différents instants d'une même journée.
Le PGS délimite trois zones :

- Zone I, dite zone de gêne très forte, d'indice Lden supérieur à 70.
- Zone II, dite zone de gêne forte, située entre les courbes d'indice Lden 70 et 65.
- Zone III, dite zone de gêne modérée, située entre les courbes d'indice Lden 65 et 55.

Les riverains situés à l'intérieur d'une zone perçoivent une indemnité modulée selon les zones. Cette indemnité est financée par la taxe sur les nuisances sonores.
Un riverain est persuadé qu'il devrait être classé dans la zone I alors que l'aéroport le situe dans la zone II.

On admet que l'indice du bruit, noté $X$, suit une loi normale de paramètres $(m, \sigma)$, $m$ inconnu et $\sigma = 2$.

Le bruit moyen, enregistré chez ce riverain, sur un échantillon de $100$ mesures vaut $69{,}3$ *db*.

**1.** Pour un risque de première espèce $\alpha = 5\%$, tester l'hypothèse $H_0 : m = 70$ contre l'hypothèse $H_1 : m = 69$.

Calculer le risque de deuxième espèce $\beta$.

En déduire la puissance $\gamma$ de ce test.

**2.** Pour un risque de première espèce $\alpha = 5\%$, tester l'hypothèse $H_0 : m = 69$ contre l'hypothèse $H_1 : m = 70$.

Calculer le risque de deuxième espèce $\beta$.

En déduire la puissance $\gamma$ de ce test.

**3.** Parmi les tests des questions 1 et 2, quel est celui le plus favorable à l'indemnisation du riverain ?

**DOCUMENT :**

**Table de la loi normale**

NOTA :
- 2 points seront retirés au total de la note sur 20 si la copie contient plus de 10 fautes d'orthographe ou de syntaxe.
- **Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies** : pas de signature (signature à apposer uniquement dans le coin gommé de la copie à rabattre) ou nom, grade, même fictifs. Seuls la date du concours et le destinataire, (celui-ci est clairement identifié dans l'énoncé du sujet) sont à porter sur la copie.
- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.
- Lorsque les renvois et annotations en bas d'une page ou à la fin d'un document ne sont pas joints au sujet, c'est qu'ils ne sont pas indispensables.

# FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE

$$\Pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

| $t$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7290 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9779 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 09898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |

**Table pour les grandes valeurs de $t$**

| $t$ | 3,0 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,8 | 4,0 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,99865 | 0,99904 | 0,99931 | 0,99952 | 0,99966 | 0,99976 | 0,999841 | 0,999928 | 0,999968 | 0,999997 |