CNFPT

CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

SESSION 2010

Composition portant sur un sujet de statistiques

EPREUVE N° 35

Durée : 5 h
Coefficient : 2

SUJET :

PROBLEME I (5 points)

Rappel. Pour tout nombre réel t, $t \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} t^k = \frac{t(1-t^n)}{1-t} \text{ et } \sum_{k=1}^{n-1} k t^{k-1} = \frac{(n-1)t^n - nt^{n-1} + 1}{(1-t)^2}$$

Dans un stand de tir d'une fête foraine un joueur possède n cartouches, $n \geq 2$. Le jeu consiste à atteindre un pigeon en terre cuite. A chaque essai la probabilité de succès vaut p, $0 < p < 1$. On suppose que les différents essais sont indépendants. Le joueur s'arrête dès qu'il a atteint le pigeon.

1. Soit X le nombre aléatoire de cartouches utilisées par le joueur.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer son espérance $E(X)$. On donnera le résultat en fonction de $q = 1 - p$.

2. Sachant que le joueur a atteint son but, quelle est la probabilité pour que ce soit au $n^{ème}$ tir ?

3. Dans cette question on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$.
Si le joueur atteint son but avec la $k^{ème}$ cartouche ($1 \leq k \leq 3$), il lance $4 - k$ fois une pièce bien équilibrée et il reçoit 1 euro pour chaque résultat «pile» obtenu. Soit Y le gain aléatoire de ce joueur.

a) Déterminer la loi du couple (X, Y) présentée sous forme de tableau. En déduire la loi de Y.

b) Calculer l'espérance $E(Y)$ de Y.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

d) Calculer la covariance de (X, Y).

PROBLEME II (5 points)

On note *(D)* la partie du plan définie par $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. On considère la fonction f de deux variables définie par :

$$\begin{cases} f(x, y) = a[1 + xy(x^2 - y^2)], \text{ si } (x, y) \in (D) \\ f(x, y) = 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

où a est un nombre réel.

1. a) En utilisant les symétries de la fonction à intégrer, démontrer que :

$$\iint_{(D)} xy(x^2 - y^2)\, dx\, dy = 0$$

b) Déterminer le nombre réel a pour que f soit la densité d'un couple de variables aléatoires continues $U = (X, Y)$.

c) Déterminer la densité de chacune des variables aléatoires X et Y.

d) Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ? Justifier.

e) Calculer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.

f) Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$.

g) Calculer la covariance de (X, Y).

2. On pose $S = X + Y$.

a) Démontrer que la fonction de répartition G de S vérifie :

$$G(-t) = 1 - G(t)$$

On pourra interpréter cette égalité en termes d'aires en utilisant une figure.

b) Calculer $G(t)$.

c) En déduire la densité g de S.

d) Calculer la variance $V(S)$.

PROBLEME III (5 points)

Le tableau suivant donne les résultats du référendum français sur la constitution européenne en 2005.

	Inscrits	Abstentions	Votants	Bulletins nuls	Suffrages exprimés	Votes «oui»	Votes «non»
Effectifs	41 789 202	12 800 902	28 988 300	730 522	28 257 778	12 808 270	15 449 508

Source : http//www.france-politique.fr

Partie A.

Dans cette partie on se propose de calculer la taille minimum d'un échantillon constitué à la

sortie des bureaux de vote pour prévoir le résultat final au niveau de confiance de *99%*.

Les différentes étapes de la résolution de ce problème sont les suivantes :

1. Calculer les proportions des votes «*oui*», puis des votes «*non*» par rapport aux suffrages exprimés.

2. On note Ω l'ensemble des suffrages exprimés et X la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\begin{cases} X(\omega) = 1, \text{ si l'électeur } \omega \text{ a voté } «oui» \\ X(\omega) = 0, \text{ si l'électeur } \omega \text{ a voté } «non» \end{cases}$$

Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

Dans toute la suite de ce problème on se limitera aux échantillons extraits de l'ensemble Ω défini précédemment.

3. A chaque individu $\omega_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, d'un échantillon de taille n est associée la variable aléatoire X_i de même loi que la variable aléatoire X. On note :

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes. Calculer l'espérance $E(F_n)$ et l'écart-type $\sigma(F_n)$.

4. En déduire, à l'aide du théorème central limite, la taille minimum n de l'échantillon choisi au niveau de confiance de *99%*.

Partie B.

En supposant que $n = 1\,000$, déterminer le niveau de confiance correspondant à cette valeur, conformément aux données du tableau initial.

PROBLEME IV (5 points)

Les services administratifs d'un organisme public ont analysé les temps d'attente à l'accueil.

Partie A.

Le tableau suivant regroupe les valeurs observées sur un échantillon de 100 personnes.

Temps d'attente t en minutes	$0 \leq t < 2$	$2 \leq t < 4$	$4 \leq t < 6$	$6 \leq t < 8$	$8 \leq t < 10$	$10 \leq t$
Nombre de personnes	34	23	14	9	7	13

On propose d'effectuer un test d'ajustement du khi-deux, au risque de *5%*, avec pour hypothèse H_0 :

«Le temps d'attente par personne suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$»

1. Calculer les effectifs théoriques sous cette hypothèse.

2. En déduire la valeur expérimentale pour le khi-deux.

3. Donner la conclusion du test.

Rappel. La densité d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ est définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \text{ si } t \geq 0 \\ f(t) = 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Partie B.

Dans l'objectif de réduire les temps d'attente, une modification des horaires d'ouverture a été proposée au public.

Les mesures, en minutes décimalisées, observées sur un échantillon de 12 personnes sont les suivantes :

4,3	3,8	4,6	5,6	3,7	2,4	5,3	4,3	5,8	1,5	4,1	2,8

1. Calculer la moyenne empirique $\bar{x}$ et la variance empirique s^2 de cet échantillon.

2. En déduire des estimations non biaisées de l'espérance m et de la variance σ^2 du temps d'attente.

3. Peut-on encore considérer que le nouveau temps d'attente suit une loi exponentielle ? Justifier votre réponse.

DOCUMENTS :

Tables des lois normale et du khi-deux

NOTA :

- 2 points seront retirés au total de la note sur 20 si la copie contient plus de 10 fautes d'orthographe ou de syntaxe.
- **Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies** : pas de signature (signature à apposer uniquement dans le coin gommé de la copie à rabattre) ou nom, grade, même fictifs. Seuls la date du concours et le destinataire, (celui-ci est clairement identifié dans l'énoncé du sujet) sont à porter sur la copie.
- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.
- Lorsque les renvois et annotations en bas d'une page ou à la fin d'un document ne sont pas joints au sujet, c'est qu'ils ne sont pas indispensables.

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE

$$\Pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	09898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

LOI DU KHI-DEUX

Valeurs de χ^2 ayant la probabilité $q = 1 - p$ d'être dépassées

q / ν	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001
1		0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	1,39	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,01	1,42	2,37	3,67	4,64	6,25	7,82	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

ÉPREUVE N° 35