CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

SESSION 2011

Composition portant sur un sujet de mathématiques

EPREUVE N° 34

Durée : 5 h
Coefficient : 2

SUJET :

Notations. Soit E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E. Rappelons que $Ker\, f$ désigne le noyau de f et $Im\, f$ l'image de f. On note e l'endomorphisme identique de E. Pour tout nombre réel k on note A_k l'ensemble des endomorphismes de E vérifiant la relation $f^2 = kf$; rappelons que $f^2 = f \circ f$.

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

Partie I

A. Soit f un endomorphisme de A_k.

1. a) Montrer que f est inversible si et seulement si f est l'homothétie de rapport k, $k \neq 0$.

b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x lorsque f appartient à A_k et x à $Im\, f$.

2. a) Si E est de dimension finie, démontrer que les endomorphismes non nuls de A_0 ne sont pas diagonalisables.

b) Démontrer que les relations $f \in A_0$ et $Im\, f \subset Ker\, f$ sont équivalentes.

3. On suppose $k \neq 0$ et $f \in A_k$.

a) Soit $x' \in Im\, f$ et $x'' \in Ker\, f$. On pose $x = x' + x''$, exprimer x' et x'' en fonction de x, k et $f(x)$.

b) Démontrer que tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = x' + x''$ avec $x' \in Im\, f$ et $x'' \in Ker\, f$.

c) Dans le cas où E est de dimension finie, montrer que f est diagonalisable. Expliciter alors une matrice diagonale de f.

B. Soit f et g deux endomorphismes de E.

1. Démontrer que :

$$Im\,(f+g) \subset Im\,f + Im\,g \text{ et } Ker\,f \cap Ker\,g \subset Ker\,(f+g)$$

2. On suppose que f et g appartiennent à A_k avec $k \neq 0$.

a) Démontrer que les relations :

$$(f+g \in A_k) \text{ et } (f \circ g + g \circ f = 0)$$

sont équivalentes.

b) Démontrer que les relations :

$$(f \circ g + g \circ f = 0) \text{ et } (f \circ g = g \circ f = 0)$$

sont équivalentes.

Pour cela, on pourra expliciter la relation :

$$f \circ (f \circ g + g \circ f) - (f \circ g + g \circ f) \circ f$$

c) On suppose de plus que $f + g \in A_k$. Démontrer que :

$$Ker\,(f+g) \subset Ker\,f \cap Ker\,g$$

En déduire que :

$$Ker\,(f+g) = Ker\,f \cap Ker\,g$$

d) On suppose encore que $f + g \in A_k$. Pour x appartenant à $Im\,f + Im\,g$, montrer que $(f+g)(x)$ s'exprime en fonction de x. En déduire que :

$$Im\,f + Im\,g \subset Im\,(f+g)$$

puis :

$$Im\,f + Im\,g = Im\,(f+g)$$

C. Soit a et b deux nombres réels tels que $a^2 + 4b > 0$ et f un endomorphisme de E vérifiant les deux conditions suivantes :

i) La famille (f, e) est libre.

ii) $f^2 = af + be$.

1. a) Démontrer qu'il existe quatre nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, k_1$ et k_2 tels que :

$$f - \lambda_1 e \in A_{k_1} \text{ et } f - \lambda_2 e \in A_{k_2}$$

b) Exprimer k_1 et k_2 en fonction de λ_1 et λ_2. En déduire que k_1 et k_2 sont non nuls.

2. Avec les valeurs de λ_1 et λ_2 trouvées précédemment, on pose :

$$u_1 = f - \lambda_1 e \text{ et } u_2 = f - \lambda_2 e$$

a) Démontrer que :

$$u_1 \circ u_2 = u_2 \circ u_1 = 0$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $n \geq 1$, on a :

$$f^n = \frac{\lambda_2^n u_1 - \lambda_1^n u_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Rappelons que pour $n \geq 2$:

$$\begin{cases} f^n = f \circ f^{n-1} \\ f^1 = f \end{cases}$$

3. Démontrer que f est inversible si et seulement si $b \neq 0$ et préciser alors son inverse.

D. Etude d'un exemple.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à sa base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b, que l'on déterminera, tels que :

$$f^2 = af + be$$

2. Avec les notations de la partie C, calculer λ_1, λ_2, k_1 et k_2 ainsi que les matrices A_1 et A_2 des endomorphismes u_1 et u_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. En déduire A^n pour tout entier naturel n, $n \geq 1$.

Partie II

Cette partie fournit des exemples, tirés de l'analyse, d'endomorphismes u d'un espace vectoriel E vérifiant la relation $u^2 = ku$, où k est un nombre réel donné.

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

Partie A

Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur $I =]0, +\infty[$ et u l'application de E dans E définie, pour toute fonction f de E et tout nombre réel x, $x > 0$, par :

$$u(f)(x) = x f'(x)$$

1. Démontrer que u est un endomorphisme de E.

2. Soit F_k l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $u^2(f) = ku(f)$ où k est un nombre réel donné.

a) Démontrer que F_k est un sous-espace vectoriel de E, stable par u.

b) La restriction de u à F_k définit un endomorphisme de F_k, que l'on note v. Démontrer que $v^2 = kv$.

3. Démontrer que les fonctions f de F_k sont toutes les solutions d'une équation différentielle que l'on précisera.

4. Préciser, selon les valeurs de k, une base de F_k.

Partie B

On note E l'espace vectoriel des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et u l'endomorphisme de E défini, pour toute fonction f de E, par :

$$u(f) = f''$$

Soit F_k l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $u^2(f) = ku(f)$ où k est un nombre réel donné.

1. a) Démontrer que F_k est un sous-espace vectoriel de E, stable par u.

b) La restriction de u à F_k définit un endomorphisme de F_k, que l'on note v. Démontrer que $v^2 = kv$.

2. Déterminer les fonctions f de F_k en discutant selon les valeurs de k.

3. Préciser une base de F_k dans chaque cas étudié.

Partie C

Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $I = [0, 1]$, F une fonction non nulle donnée de E et u l'application de E dans E définie, pour toute fonction f de E et tout nombre réel x, $0 \leq x \leq 1$, par :

$$u(f)(x) = F(x) \int_0^1 t f(t)\, dt$$

1. Démontrer que u est un endomorphisme de E. Préciser l'image de u.

2. Démontrer qu'il existe un nombre réel k, dépendant de F, tel que $u^2 = ku$.

3. Calculer k lorsque $F(x) = Arc\ sin(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

Partie D

Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur $I =]0, +\infty[$ et u l'application de E dans E définie, pour toute fonction f de E et tout nombre réel x, $x > 0$, par :

$$u(f)(x) = f(x) + xf'(x)$$

1. Démontrer que u est un endomorphisme de E.

2. Soit F_k l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $u^2(f) = ku(f)$ où k est un nombre réel donné.

a) Démontrer que F_k est un sous-espace vectoriel de E, stable par u.

b) La restriction de u à F_k définit un endomorphisme de F_k, que l'on note v. Démontrer que $v^2 = kv$.

3. Démontrer que les fonctions f de F_k sont toutes les solutions d'une équation différentielle du deuxième ordre que l'on précisera.

4. Pour toute fonction f de E on note φ la fonction de E définie par :

$$\varphi(t) = f(e^t)$$

Démontrer que $f \in F_k$ si et seulement si φ est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre que l'on précisera.

5. Résoudre l'équation différentielle de la question 4, en discutant selon les valeurs de k.

6. Déterminer les sous-espaces vectoriels F_k et en préciser une base selon les valeurs de k.

NOTA :
- 2 points seront retirés au total de la note sur 20 si la copie contient plus de 10 fautes d'orthographe ou de syntaxe.
- **Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies** : pas de signature (signature à apposer uniquement dans le coin gommé de la copie à rabattre) ou nom, grade, même fictifs. Seuls la date du concours et le destinataire, (celui-ci est clairement identifié dans l'énoncé du sujet) sont à porter sur la copie.
- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.
- Lorsque les renvois et annotations en bas d'une page ou à la fin d'un document ne sont pas joints au sujet, c'est qu'ils ne sont pas indispensables.