CNFPT

CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

SESSION 2010

Composition portant sur un sujet de mathématiques

EPREUVE N° 34

Durée : 5 h
Coefficient : 2

SUJET :

PROBLEME I (10 points)

Partie I

1. On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels vérifiant les conditions suivantes :

(C_1) $\quad P_0(X) = 1$

et :

$$(C_2) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 P_n(x)\,dx = 0 \\ P_n' = nP_{n-1},\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On pose $B_n = P_n(0)$.

a) Démontrer que la condition (C_2) est équivalente à la condition :

$$P_n(X) = n[A_n(X) - \lambda_n]$$

avec :

$$A_n(X) = \int_0^X P_{n-1}(x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lambda_n = \int_0^1 A_n(x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}^*$$

En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et que $d^\circ P_n = n$.

b) On note a_n le coefficient dominant du polynôme P_n. Pour $n \geq 1$, exprimer a_n en fonction de a_{n-1} ; en déduire la valeur de a_n.

2. Calculer P_n et B_n pour $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$.

3. a) Démontrer que la condition (C_2) est équivalente à :

$$\begin{cases} P_n' = nP_{n-1}, n \geq 1 \\ P_{n+1}(0) = P_{n+1}(1), n \geq 1 \end{cases}$$

b) On pose :

$$Q_n(X) = (-1)^n P_n(1-X)$$

Démontrer que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions (C_1) et (C_2) ; que peut-on en conclure ?

c) Démontrer que pour tout entier naturel k, $k \geq 1$, on a $B_{2k+1} = 0$.

4. a) Démontrer que P_5 peut s'écrire :

$$P_5(X) = X(X-1)(X-\frac{1}{2})A(X)$$

et que $A(X)$ est négatif sur $[0, 1]$.

b) En déduire le maximum de $|P_6|$ sur $[0, 1]$.

c) Démontrer que pour $0 \leq x \leq 1$ on a :

$$|P_7(x)| \leq \frac{1}{6}$$

5. a) Soit k un entier naturel, $1 \leq k \leq n$. Exprimer $P_n^{(k)}$ en fonction de k, n et P_{n-k}. En déduire $P_n^{(k)}(0)$ en fonction de k, n et B_{n-k}.

b) Démontrer que :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} X^k$$

c) En déduire que pour $n \geq 2$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = 0$$

d) Retrouver ainsi les valeurs de B_1, B_2, B_3, B_4.

Partie II

1. Démontrer que pour tout nombre réel x, $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x+1} < \ell n(x+1) - \ell n\, x < \frac{1}{x}$$

2. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ell n\,(n) \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ell n\,(n+1)$$

a) Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note γ leur limite commune.

b) Pour $n \geq 1$, on pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que :

$$\gamma + \ell n(n) \leq w_n \leq \gamma + \ell n(n+1)$$

En déduire que :

$$w_n \underset{+\infty}{\sim} \ell n(n)$$

3. Etant donné deux entiers naturels p et q avec $p \geq 1$, on pose :

$$I_p(q) = \int_0^1 \frac{P_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+2}}dx \text{ et } J_p(q) = \int_0^1 \frac{P_{2q}(x)}{(x+p)^{2q+1}}dx$$

a) En intégrant par parties $I_p(q)$, démontrer que :

$$I_p(q) = J_p(q)$$

b) En intégrant par parties $J_p(q)$ pour $q \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre $I_p(q)$ et $I_p(q-1)$.

c) Démontrer que :

$$I_p(q) = I_p(0) + \sum_{k=1}^{q} \frac{B_{2k}}{2k}\left(\frac{1}{p^{2k}} - \frac{1}{(p+1)^{2k}}\right)$$

d) Calculer $I_p(0)$. En déduire $I_p(q)$.

PROBLEME II (10 points)

Dans ce problème on note E l'ensemble des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels. On rappelle que E a une structure d'espace vectoriel réel et que sa dimension est égale à 9.

Partie I

On considère les quatre matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

1. On note :

$$H = \{A, B, C, D, O\}$$

où O est la matrice nulle.

Calculer les carrés des matrices A, B, C, D et leurs produits deux à deux. Vérifier que ce sont des éléments de H. Pour simplifier les calculs on admet que :

$$AC = AD = BA = B^2 = C^2 = CD = DA = DB = O$$

On résumera les résultats dans le tableau suivant :

	A	B	C	D
A			O	O
B	O	O		
C			O	O
D	O	O		

2. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les matrices A, B, C, D. Démontrer que F est de dimension 4.

3. Démontrer que le produit de deux matrices de F appartient à F.

4. Démontrer qu'il existe une matrice unique J de F telle que pour toute matrice M de F on a :

$$JM = MJ = M$$

Expliciter J.

Partie II

On considère les six formes linéaires u_i, $1 \leq i \leq 3$ et v_j, $1 \leq j \leq 3$, définies sur E par :

- $u_i(M)$, $1 \leq i \leq 3$, est la somme des termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne de M.
- $v_j(M)$, $1 \leq j \leq 3$, est la somme des termes de la $j^{\text{ème}}$ colonne de M.

Soit f l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}^6$ définie par :

$$f(M) = (u_1(M), u_2(M), u_3(M), v_1(M), v_2(M), v_3(M))$$

et g la forme linéaire de $\mathbb{R}^6$ définie par :

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6$$

1. Calculer la dimension du noyau de g.

2. Démontrer que $Im\ f \subset Ker\ g$; on pourra déterminer $g \circ f$.

3. Soit :

$$x = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in Ker\ g$$

Démontrer qu'il existe des nombres réels p, q, ,r tels que la matrice $M = \left(m_{ij} \right)$ définie par :

$$m_{ij} = pa_i + qb_j + r$$

vérifie $f(M) = x$. Pour simplifier les calculs on posera $a_1 + a_2 + a_3 = 3k$.

4. a) Déduire des deux questions précédentes que $Im\, f = Ker\, g$

b) Calculer la dimension de $Ker\, f$.

c) Démontrer que $F = Ker\, f$.

Partie III

On note G l'ensemble des matrices M de E telles que :

$$u_1(M) = u_2(M) = u_3(M) = v_1(M) = v_2(M) = v_3(M)$$

1. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

2. On note φ la restriction de f à G.

a) Démontrer que $Im\, \varphi$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^6$.

b) Démontrer que $F \subset G$. En déduire que $dim\, Ker\, \varphi = 4$.

c) Des deux questions précédentes déduire la dimension de G et en construire une base.

NOTA :

- 2 points seront retirés au total de la note sur 20 si la copie contient plus de 10 fautes d'orthographe ou de syntaxe.
- **Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies** : pas de signature (signature à apposer uniquement dans le coin gommé de la copie à rabattre) ou nom, grade, même fictifs. Seuls la date du concours et le destinataire, (celui-ci est clairement identifié dans l'énoncé du sujet) sont à porter sur la copie.
- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.
- Lorsque les renvois et annotations en bas d'une page ou à la fin d'un document ne sont pas joints au sujet, c'est qu'ils ne sont pas indispensables.

ÉPREUVE N° 34