CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

SESSION 2013

Composition portant sur un sujet de statistiques

EPREUVE N° 35

Durée : 5 h
Coefficient : 2

SUJET :

PROBLEME I (6 points)

On considère la distribution de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes *(X, Y)* définie par le tableau :

X \ Y	-1	1	2
-2	0,2	0,2	a
0	0,1	0,1	0,05
1	0,2	0	0,1

1. Calculer a.

2. En déduire les lois marginales de X et de Y, puis calculer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. a) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = 1$.

b) En déduire l'espérance conditionnelle $E(X / Y = 1)$.

5. Calculer l'espérance conditionnelle de X sachant que $Y \neq 2$.

6. Calculer $E(XY)$ et en déduire $cov(X, Y)$.

7. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z, puis calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

PROBLEME II (4 points)

Le parc automobile d'une municipalité est constitué de 5 voitures et 3 camions.

Chaque véhicule peut être immobilisé une ou plusieurs journées pour entretien ou réparations. On suppose que la probabilité qu'une voiture (resp. camion) soit indisponible un jour donné est $\alpha = 0,03$ (resp. $\beta = 0,05$).

On note X (resp. Y) la variable aléatoire «nombre de voitures (resp. camions) disponibles un jour donné». On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

1. Déterminer la distribution de probabilité de chacune des variables aléatoires X et Y puis celle du couple (X, Y).

2. Calculer la probabilité que tous les véhicules soient disponibles un jour donné.

3. Déterminer le nombre moyen $E(X)$ (resp. $E(Y)$) de voitures (resp. camions) disponibles.

En déduire le nombre moyen de véhicules en état de marche un jour donné.

4. Suite à une réorganisation du service de maintenance, les valeurs de α et β sont modifiées. Représenter graphiquement l'ensemble des couples (α, β) tels que :

$$E(X + Y) \geq 7$$

PROBLEME III (3 points)

Une communauté de communes envisage de construire une salle polyvalente. La population totale concernée est d'environ 5 000 habitants et le nombre de personnes présentes simultanément aux activités proposées représente environ *20%* de cette population.

Afin de définir la capacité de cette salle, il a été supposé que :

- La probabilité qu'une personne assiste aux activités est $p = 0,2$.
- Le nombre total d'habitants est $N = 5\ 000$.

1. a) Justifier que le nombre de personnes présentes à chaque séance suit une loi de probabilité qui peut être approchée par une loi normale.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de cette loi.

2. Combien faut-il prévoir de places pour que cette salle soit suffisante au moins 99 fois sur 100 ?

PROBLEME IV (7 points)

Un organisme de formation utilise deux bâtiments notés A et B. Le bâtiment A dispose de deux salles de conférences et de quatre grandes salles de cours, tandis que le bâtiment B contient dix petites salles de cours.

Le but de cet exercice est d'étudier la durée de vie des ampoules électriques basse consommation utilisées dans ces deux bâtiments. Nous supposons que toutes ces ampoules ont été installées à la même date et ont les mêmes caractéristiques.

Il a été recensé 150 ampoules dans le bâtiment A et 120 dans le bâtiment B.

La durée de vie annoncée par le fabricant est de 8 000 heures pour chacune de ces ampoules. Afin d'étudier la durée de vie de ces ampoules, nous proposons d'effectuer une étude statistique portant sur deux échantillons, notés *A* et *B,* issus des bâtiments A et B. La durée de vie est en milliers d'heures.

Echantillon *A* (16 mesures)

7,1	8,1	8,2	8,6	7,7	7,2	7,8	8,6	8,5	8,2	8,2	7,4	7,6	7,9	8,1	7,8

Echantillon *B* (9 mesures)

7,7	8,5	8,6	8,2	7,6	7,2	7,4	8,3	8,7

On note :

X_A (resp. X_B) la variable aléatoire «Durée de vie, mesurée en heures, d'une ampoule du bâtiment A (resp. B)»

1. Calculer les moyennes empiriques $\overline{x}_A$ et $\overline{x}_B$ puis les variances empiriques s_A^2 et s_B^2 des échantillons *A* et *B*.

2. En déduire des estimations non biaisées de l'espérance mathématique et de la variance des variables aléatoires X_A et X_B.

3. Déterminer un intervalle de confiance au risque de *5%* de l'écart-type σ_A (resp. σ_B) de la durée de vie X_A (resp. X_B) d'une ampoule.

Rappelons que, pour un échantillon de taille *n*, la variable aléatoire $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ suit la loi du khi-deux à $n - 1$ degrés de liberté.

4. Les deux échantillons *A* et *B* sont maintenant réunis en un seul échantillon noté *C*.

Calculer $\overline{x}_C$ et s_C^2 en fonction de $\overline{x}_A$, $\overline{x}_B$, s_A^2 et s_B^2, puis donner les valeurs numériques de $\overline{x}_C$ et s_C^2.

5. a) Peut-on considérer, au risque de *5%*, que la variable aléatoire X_C : «Durée de vie, mesurée en heures, d'une ampoule de l'ensemble des bâtiments A et B» suit la loi normale de paramètres $m = 8\ 000$ heures et $\sigma = 480$ heures ? On pourra effectuer un test d'adéquation du khi-deux basé sur les échantillons *A* et *B*.

b) Dans l'affirmative, calculer le nombre approximatif d'ampoules à remplacer dans ces deux bâtiments au bout de quatre ans. On supposera que la durée annuelle d'utilisation d'une ampoule est de 1 800 heures.

DOCUMENTS :

Tables de la loi normale et du khi-deux

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE

$$\Pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

t	*0,00*	*0,01*	*0,02*	*0,03*	*0,04*	*0,05*	*0,06*	*0,07*	*0,08*	*0,09*
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	09898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
	0,99865	0.99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

LOI DU KHI-DEUX

Valeurs de χ^2 ayant la probabilité $q = 1 - p$ d'être dépassées

v \ q	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001
1		0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	1,39	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1.01	1,42	2,37	3,67	4,64	6,25	7,82	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1.65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2.34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3.07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	3.82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4.59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5.38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6.18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6.99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7.81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8.63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9.47	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7