CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

SESSION 2013

Composition portant sur un sujet de mathématiques

EPREUVE N° 34

Durée : 5 h
Coefficient : 2

SUJET :

Problème I

Notations et définition. Soit E un espace vectoriel réel non nécessairement de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note e (resp. o) l'endomorphisme identique (resp. nul) de E ; ces endomorphismes sont appelés endomorphismes triviaux.

On note $Ker\, f$ le noyau de f et $Im\, f$ l'image de f.

Rappelons que $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$ si $n \geq 2$.

Un endomorphisme p de E est appelé un projecteur s'il vérifie la condition $p^2 = p$.

Partie I

1. Démontrer que p est un projecteur si et seulement si $e - p$ en est un.

2. a) Quel est le seul projecteur inversible de E ?

b) Déterminer le projecteur p pour que $e - p$ soit inversible.

3. Soit p un projecteur. Démontrer que :

$$Ker\ p = Im(e - p) \text{ et } Im\ p = Ker(e - p)$$

On pourra remarquer que $e = p + (e - p)$.

4. a) Démontrer que :

$$Im\, p \cap Ker\ p = \{0\}$$

b) Démontrer que tout vecteur x de E peut s'écrire :

$$x = x' + x'' \text{ avec } x' \in Im\, p,\, x'' \in Ker\ p \text{ (ou } E = Im\, p + Ker\, p)$$

c) En déduire que cette décomposition est unique.

5. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés d'un projecteur non trivial.

6. Soit p un projecteur et f un endomorphisme de E. Démontrer que les relations :

i) $p \circ f = f \circ p$

ii) $f(\mathrm{Im}\, p) \subset \mathrm{Im}\ p$ et $f(Ker\ p) \subset Ker\ p$

sont équivalentes.

On pourra utiliser la remarque de la question 3.

Partie II

Etude d'un exemple.

On suppose $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}$. On considère l'endomorphisme f de E ayant pour matrice dans cette base :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe un seul nombre réel non nul k, que l'on déterminera, tel que $p = kf$ soit un projecteur.

2. a) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $Im\, p$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $Ker\, p$.

b) A l'aide des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, déterminer une base $\mathcal{B}_0$ de E ; écrire la matrice P_1 de p dans cette base.

3. Déduire de la question I 6, et en utilisant la base $\mathcal{B}_0$, que les endomorphismes g qui commutent avec p dépendent de cinq paramètres. Quelles conditions doivent vérifier ces paramètres pour que g soit un projecteur ?

Partie III

On note $End\, E$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. A tout endomorphisme g de E on associe l'endomorphisme G de $End\, E$ défini pour tout endomorphisme f de E par :

$$G(f) = f \circ g - g \circ f$$

On suppose qu'il existe un nombre réel α non nul tel que :

$$G(f) = \alpha f$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel k non nul on a :

$$G(f^k) = \alpha k f^k$$

Que représentent αk et f^k pour G si $f^k \neq 0$?

2. On suppose que E est de dimension finie égale à n.

a) Démontrer qu'il existe un nombre entier naturel N tel que $f^N = 0$.

b) En déduire que le seul projecteur f de E vérifiant $G(f) = \alpha f$ est $f = 0$.

Partie IV

On suppose que f et g sont deux projecteurs distincts et non nuls de E. On cherche à quelles conditions il existe deux nombres réels α et β non nuls tels que :

$$(1) \qquad f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$$

1. a) Déduire de la relation (1) la relation :

$$(2) \qquad (1-\alpha) f \circ g - (1+\alpha)\, g \circ f = 2\beta g$$

Pour cela on pourra composer par g, à gauche et à droite, les deux membres de la relation (1).

b) Déduire des relations (1) et (2) la relation :

$$(3) \qquad \alpha(\alpha - 1) f + \beta(\alpha + 1)\, g + 2\alpha g \circ f = 0$$

2. Dans cette question on suppose $\alpha \neq 1$.

a) Déduire de la relation (3) que :

$$Im\ f \subset Im\ g$$

et que :

$$g \circ f = f$$

b) En appliquant la relation (1) à un élément non nul de $Im\, f$, démontrer que $\beta = -\alpha$.

c) Déduire des questions 1.b) et 2.a) les valeurs de α et β. En déduire que $f \circ g = g$.

d) En reprenant l'exemple et les notations de la partie II, déterminer par leur matrice dans la base $\mathcal{B}_0$ les projecteurs g de E tels que :

$$p \circ g - g \circ p = -p + g$$

3. Dans cette question on suppose $\alpha = 1$.

a) Démontrer que $\beta = -1$. On pourra remarquer que (1) peut s'écrire :

$$g \circ f - f \circ g = (-\beta)g + (-\alpha)f$$

b) En reprenant l'exemple et les notations de la partie II, déterminer par leur matrice dans la base $\mathcal{B}_0$, les projecteurs g de E tels que :

$$p \circ g - g \circ p = p - g$$

Indication : on pourra transposer la relation matricielle obtenue dans la question 2. d).

Problème II

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On rappelle que par convention la dérivée d'ordre 0 de f est égale à f.

On dit qu'une fonction f de E est absolument monotone (en abrégé A.M.) si pour tout entier naturel n et tout nombre réel x de I on a :

$$f^{(n)}(x) \geq 0$$

On dit que f est complètement monotone (en abrégé C.M.) si pour tout entier naturel n et tout nombre réel x de I on a :

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$$

1. L'ensemble F des fonctions A.M. est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

2. Examiner pour chacune des fonctions suivantes, si elle est A.M., C.M. ou ni l'une ni l'autre.

a) exp sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.

c) La restriction de la fonction sin à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ notée aussi sin.

d) La restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}_+$ notée ch_+.

e) La restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}_-$ notée ch_-.

3. Soit f et g deux fonctions A.M.

a) Démontrer que la somme $f + g$ et le produit fg sont A.M.

b) Qu'en est-il pour les fonctions C.M. ?

4. Démontrer que si f est A.M. et si g est A.M. sur $f(I)$, alors la composée $g \circ f$ est A.M.

NB : on pourra démontrer par récurrence la relation :

$$(g \circ f)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (g^{(k)} \circ f) P_{n,k}, n \geq 1$$

où $P_{n,k}$ est un polynôme en f et ses dérivées.

5. On suppose que f est définie sur $I = [a, b]$ et on pose $g(x) = f(-x)$.

a) Quel est l'intervalle de définition J de la fonction g ?

b) Démontrer alors que f est A.M. si et seulement si g est C.M.

6. Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Démontrer que :

$$(1-x^2)f'(x) = xf(x).$$

b) En calculant la dérivée $(n + 1)^{ème}$ de chaque membre de cette égalité, obtenir une relation entre $f^{(n+2)}$, $f^{(n+1)}$ et $f^{(n)}$.

c) En déduire que f est A.M.

d) Que dire de la fonction g définie sur $]-1, 0]$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?

e) La restriction de la fonction *Arcsin* à $[0, 1[$ est notée aussi *Arcsin*. Démontrer que cette fonction est A.M.

f) Retrouver le résultat du 7.e) en utilisant le développement en série entière de la fonction *Arcsin*.

7. On considère la restriction de la fonction *tan* à $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$ notée aussi *tan*.

a) Démontrer que $tan^{(n)}(x) = P_n(tan x)$ où P_n est un polynôme à coefficients réels positifs.

b) Démontrer que la fonction *tan* est A.M.

8. Dans cette partie, f est une fonction numérique indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On note e l'application identique de $\mathbb{R}$.

Etant donné un nombre réel h, $h > 0$, on définit sur l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ les applications Δ_h et T_h par :

$$[\Delta_h(f)](x) = f(x+h) - f(x) \text{ et } [T_h(f)](x) = f(x+h)$$

On pose :

$$\Delta_h^0 = T_h^0 = e$$

et pour tout entier naturel n :

$$\Delta_h^{n+1} = \Delta_h^n \circ \Delta_h \text{ et, } T_h^{n+1} = T_h^n \circ T_h.$$

a) Calculer :

$$[T_h^n(f)](x)$$

b) Démontrer que :

$$[\Delta_h^n(f)](x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh)$$

c) On suppose que f est A.M. sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $\Delta_h^n(f) \geq 0$.

NOTA :

- 2 points seront retirés au total de la note sur 20 si la copie contient plus de 10 fautes d'orthographe ou de syntaxe.
- **Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies** : pas de signature (signature à apposer uniquement dans le coin gommé de la copie à rabattre) ou nom, grade, même fictifs. Seuls la date du concours et le destinataire, (celui-ci est clairement identifié dans l'énoncé du sujet) sont à porter sur la copie.
- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.
- Lorsque les renvois et annotations en bas d'une page ou à la fin d'un document ne sont pas joints au sujet, c'est qu'ils ne sont pas indispensables.