TEST D'ENTREE (2h)	Préparation Ingénieur interne	Session 2013
	MATHEMATIQUE	

Ce test comporte 4 parties indépendantes.
Les détails des calculs doivent figurer sur la copie.
Tout résultat non justifié sera considéré comme nul.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Partie 1

Exercice 1 Quelques calculs

a- *Calculer (donner la réponse sous forme de fraction simplifiée)*

$$A = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}\left(2 - \frac{1}{6}\right)$$

$$B = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$$

b- *Simplifier (donner la réponse sous forme $a\sqrt{b}$)*

$$C = 3\sqrt{8} - 2\sqrt{32}$$

c- *Développer les expressions suivantes :*

$$D = (3x - 2)(4 - 2x)$$

$$E = (-2 - a)^2 \;;\quad F = 2(5 - x)^2$$

d- *Factoriser les expressions suivantes :*

$$G = 2xy - 4x^2y + 6xy^2$$

$$H = x^2(2x - 1) - 4x(2x - 1) + 4(2x - 1)$$

Exercice 2 Résoudre dans IR les (in-)équations suivantes

(E_1) : $2x^2 - 3x = 0$

(E_2) : $4x^2 + 3x = 10$

(I) : $\dfrac{(x+2)(x-1)}{2-x} < 0$ *(Faire un tableau de signe)*

Partie 2

Exercice 1 *Ensemble de définition d'une fonction*

Pour quelle(s) valeur(s) de x les fonctions suivantes sont elles définies ?

$$f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+2} - 5x$$

$$g(x) = x\sqrt{2x-3}$$

$$h(x) = \frac{2}{x} - 4\ln(x+1)$$

Exercice 2 *Equation de droite*

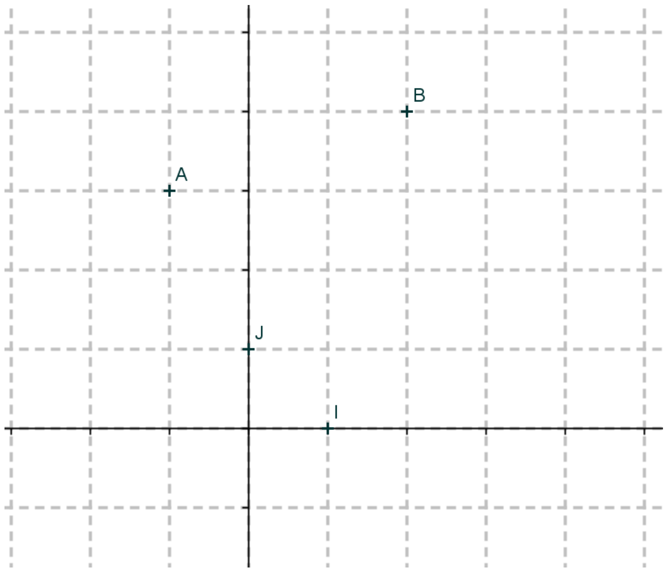
Dans le repère (O, I, J) ci-contre, on considère les points A(– 1 ; 3) et B(2 ; 4).

a- *Déterminer par lecture le coefficient directeur (ou pente) de la droite (AB)*

b- *Tracer la droite D_1 passant par A de coefficient directeur – 2*

c- *Déterminer l'équation de la droite D_2 parallèle à D_1 passant par B*

d- *Le point $C\left(\frac{7}{3} ; \frac{10}{3}\right)$ appartient-il à D_2 ?*



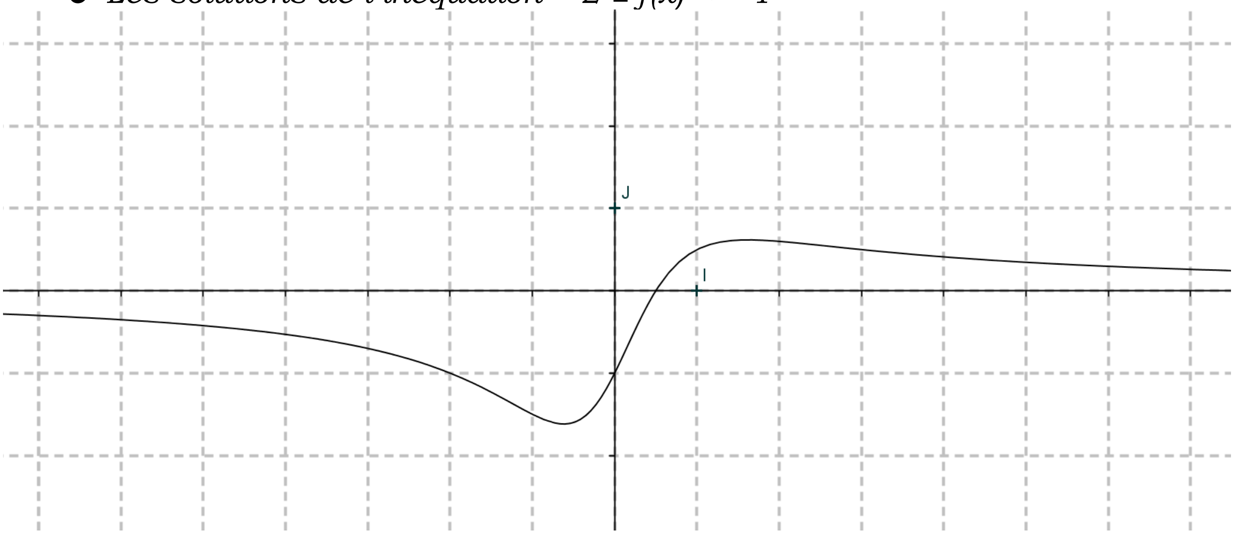
Exercice 3 *Lecture d'une courbe (puis calcul)*

1) *On considère la fonction f, dont la représentation graphique, dans le repère (O, I, J), est donnée ci-dessous. Déterminer par lecture :*

a- *L'image de – 2 et l'image de 3 par la fonction f*

b- *Le(s) antécédent(s) de $-\frac{3}{4}$ et de 0 par la fonction f*

c- *Les solutions de l'inéquation $-2 \leq f(x) < -1$*



2) *On suppose que la courbe précédente est la représentation de la fonction f, définie sur IR par* $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$

a- *Calculer les images de – 2 et de 3*

b- *Calculer les antécédents de* $-\dfrac{3}{4}$ *et de 0*

c- *Calculer la dérivée f ' de la fonction f, étudier le signe de f ' ; en déduire le tableau de variation de la fonction f*

Partie 3

Exercice 1 *Calcul intégral*

On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 2x - \ln(2x + 1)$$

$$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} - (x + \frac{1}{2})\ln(2x + 1)$$

a- *Justifier que ces 2 fonctions sont définies sur l'intervalle* $I =]-\dfrac{1}{2} ; +\infty[$

b- *Vérifier que la fonction g est une primitive de la fonction f*

c- *On admet que f est décroissante sur* $]-\dfrac{1}{2} ; 0]$ *et croissante sur* $[0 ; +\infty[$

Calculer f(0). Que peut-on en déduire pour f(x) lorsque x appartient à [0 ; 1] ?

d- *Que représente le nombre* $A = \int_0^1 f(x)dx$ *? Calculer ce nombre.*

Exercice 2 *Un peu de réflexion*

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Montrer que la propriété : « la somme des coordonnées est égale à leur produit » *est vérifiée pour tout point de (C)*

Partie 4

1- *Soient $z = 2 - 3i$ et $z' = 1 + 2i$; donner la forme algébrique de $2z - 4z'$, de* $\frac{z}{z'}$,

2- *Vérifier que les nombres $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = \overline{z_1}$ sont solution de l'équation :*

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

3- *Soient z et Z deux nombres complexes tels que $Z = 2z^2 - z + 1$*
Il s'agit de déterminer l'ensemble des nombres complexes z tel que Z soit un nombre réel.

a- *En posant $z = a + ib$, donner l'écriture algébrique de Z en fonction de a et b*

b- *Déterminer une condition sur les deux réels a et b pour que Z soit un nombre réel.*

c- *En déduire l'ensemble des points du plan dont l'affixe z répond à la question*

Rappels

1) - *La fonction inverse est définie sur l'ensemble $IR - \{0\}$*
- *La fonction racine carrée est définie sur l'ensemble $[0 ; +\infty[$*
- *La fonction logarithme est définie sur l'ensemble $]0 ; +\infty[$*

2) - *Pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$*
- *Pour tous réels a et b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$*

3) - *Le nombre complexe i vérifie $i^2 = -1$*
- *L'écriture algébrique d'un nombre complexe est de la forme : $a + bi$ où a et b sont 2 nombres réels*
- *Le nombre conjugué de z, noté $\overline{z}$, a pour écriture algébrique $a - ib$*